Sons, fréquences, harmoniques, tons : le compromis du piano

Marc SAGE

Table des matières

L'association de deux sons peut procurer à l'oreille aussi bien une sensation d'harmonie parfaite qu'une dissonance des plus désagréables. Ce texte se propose d'expliquer les phénomènes physiques sous-jacents et d'en venir à la conclusion qu'il n'y aucun intervalle harmonieux permettant de reconstruire tous les autres.

Prérequis :

1. pouvoir décréter qu'une association sonore est harmonieuse (ou pas) ;
2. le nom des notes sur le piano ;
3. le nom des intervalles ;
4. le calcul des fractions ainsi que les puissances entières et fractionnaires ;
5. savoir additionner des vecteurs ;
6. quelques notions sur les unités de temps et longueur (et vitesse).

Pour différencier les octaves, on mettra un nombre en exposant. Par exemple, fa^3 signifiera le troisième fa (du piano) en partant des graves, de même $^\flat si^5$ désignera le cinquième *si* bémol.

1 Deux expériences

1.1 Harmoniques d'une note d'un piano

Frapper le do^1 sur un piano et écouter en mettant la pédale : d'autres notes se font entendre, d'autant plus faiblement qu'elles sont aigües. Dans l'ordre, on liste

$$\begin{array}{l} do^1 \\ do^2\ sol^2 \\ do^3\ mi^3\ sol^3\ {}^\flat si^3 \\ do^4\ ré^4\ mi^4\ {}^\sharp fa^4\ sol^4\ \cdots \end{array}$$

Pour entendre les notes les plus aigües, on pourra enfoncer la touche correspondante sans produire la note, puis lever la pédale : il devrait rester un résidu sonore de hauteur souhaitée.

Ces notes supplémentaires sont appelées ***harmoniques*** de la première note que l'on a fait sonner (ici le *do*), laquelle est aussi appelée harmonique ***fondamentale***.

Si l'on fait la même expérience avec une autre note, par exemple en prenant pour fondamentale un *mi*, on entendra les harmoniques suivantes

$$\begin{array}{l} mi^1 \\ mi^2\ si^2 \\ mi^3\ {}^\sharp sol^3\ si^3\ ré^3 \\ mi^4\ {}^\sharp fa^4\ {}^\sharp sol^4\ {}^\sharp la^4\ si^4\ \cdots \end{array}$$

Le musicien observera que les intervalles successifs sont les mêmes :

octave
quinte, quarte,
tierce majeure, tierce mineure *deux fois*, seconde majeure,
seconde majeure *trois fois*, seconde mineure...

et que la complexité des intervalles va également croissant : on va de l'octave à la seconde mineure en passant par la quinte puis les tierces.

Qu'est-ce qui se cache derrière ces suites ?

1.2 Pincer des cordes

Attacher une corde un peu élastique à ses deux extrémités de façon horizontale (cela nécessitera de la tendre un petit peu), appuyer sur la corde pour l'étendre au-delà de sa longueur au repos, puis relâcher brutalement. Selon la nature de la corde, un son se produira.

Maintenant, pincer la corde en fixant son milieu, de sorte à créer artificiellement deux cordes de longueurs moitié. Qu'entendez-vous ? Un son harmonieux, très harmonieux, car une octave au-dessus du premier. Divisez maintenant la corde en trois : vous entendrez un autre son harmonieux, la quinte située à l'octave au-dessus. En quatre : deux octave au-dessus . En cinq : la tierce majeure majorée de deux octaves (si vous entendez bien). La coïncidence est très forte : on retrouve les intervalles de l'expérience précédente.

1.3 Un parallèle évident, mais une question...

Il est bien sûr fondamental de remarquer que faire sonner une note sur un piano revient à peu de choses près à pincer une corde tendue[1].

Ces expériences ont l'air de montrer qu'un son contient toujours d'autres sons, dont la longueur de corde associée à chacun vaut celle du son de départ divisée par un nombre entier.

Pour comprendre cela, nous aurons besoin d'un peu de vocabulaire physique et mathématique pour construire le cadre où ce phénomène trouvera une explication claire.

2 Sons et fréquences : quelques rudiments

Un son est ce que perçoit notre oreille d'un phénomène physique simple : une *vibration*.

Une vibration de quoi ? La plupart du temps, de l'air : c'est ce dernier qui transporte la vibration de l'objet sonore vers nos tympans : pas de sons dans le vide ! Mais l'on peut également s'entendre crier dans l'eau de la piscine, ou encore coller son oreille sur les rails d'une voie de chemin de fer (désaffectée !) afin d'entendre le coup de marteau porté quelques kilomètres plus loin, dont la vibration transportée par l'air sera trop atténuée par la distance pour que nous puissions la percevoir.

Pour ce qui nous intéresse, pas d'expériences pianistiques subaquatiques dans une piscine ou sur des rails : nous resterons à l'air libre. Par ailleurs, nous laissons de côté l'étude du phénomène de propagation de l'onde sonore : seule nous intéresse sa perception par notre oreille.

Qu'est-ce qu'une vibration ? C'est le nom commun de ce que les physiciens appellent une ***oscillation***. On dit qu'un système, une configuration, ***oscille*** lorsque son état se répète à intervalles réguliers dans le temps : on parle de phénomènes ***périodiques***.

2.1 Période

La ***période*** d'un système oscillatoire est la plus petite durée de temps à partir de laquelle le système reprend son état initial.

Par exemple, l'alternance jour-nuit est un phénomène périodique dont la période est de vingt-quatre heures[2]. La périodicité des marées témoigne également d'un système oscillatoire (l'océan et les mers) dont la période est d'environ onze heures (on parle souvent de deux marées par jour). Le tic-tic d'une montre trahit la présence d'un mécanisme oscillatoire dont la période vaut une seconde ; le parcours des différentes aiguilles nous donne autant d'autres périodes, chacune associée à l'état de l'aiguille correspondante : une minute pour la trotteuse, une heure pour la grande aiguille, un jour pour la petite. La rotation de la Terre est une longue (comparée aux exemples précédents) oscillation autour du Soleil dont la période vaut environ un an.

Les phénomènes ci-dessus ont tous une période supérieure à la seconde. Il existe d'autres phénomènes dont la période est beaucoup plus courte, de l'ordre du millième de seconde ou même bien en deçà – la lumière

[1] En fait, les harmoniques entendues sur la corde de piano (qui est *frappée*) seront plus sonores que celles de la corde *pincée* (d'où la moindre sonorité du clavecin par rapport au piano).

[2] modulo quelques approximations astronomiques

est un phénomène oscillatoire dont la période est de l'ordre du milliardième du millième de seconde. Pour ces phénomènes dont la période s'exprime aisément en une fraction d'une seconde, on préfère changer de vocabulaire et d'unité.

2.2 Fréquence

La ***fréquence*** d'un phénomène périodique est (par définition) l'inverse de sa période. Puisqu'une période s'exprime en secondes[3], une fréquence s'exprime en « inverse de secondes ». Par exemple, considérons un phénomène de période un vingtième de seconde. En notant T la valeur de la période[4], on écrira $T = \frac{1}{20}s$. En notant f la fréquence associée, la définition nous dit que

$$f \overset{\text{définition}}{=} \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{20}s} = 20\frac{1}{s} = 20s^{-1}.$$

Les physiciens donnent un nom à cette unité étrange qu'est l'inverse d'une seconde : le ***Hertz***, abrégé en Hz. Ainsi, la fréquence d'un phénomène dont la période est de un vingtième de seconde est de vingt Hertz. De même, la fréquence d'un phénomène de période un trentième d'un milliardième de seconde est

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{30}\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000}s} = \frac{1}{\frac{1}{30}\frac{1}{10^9}s} = 30 \cdot 10^9\ s^{-1} = 30 \cdot 10^9\ Hz,$$

soit trente milliards Hertz. Sur ces deux exemples, on voit que le Hertz est juste un moyen de parler de petites périodes sans se trimbaler de fractions[5].

On retiendra qu'*à une période d'un N-ième de seconde correspond une fréquence de N Hertz.*

Le fameux « la 440 » n'est qu'une dénomination d'une vibratoire sonore dont la fréquence vaut quatre cent quarante Hertz[6] et que notre oreille perçoit aujourd'hui comme un la (sur le piano, il s'agit du la^4 selon nos conventions).

Période, fréquence, on passe de l'une à l'autre en prenant l'inverse, secondes devant Hertz(s) et réciproquement.

Expérimentalement, nous n'avons cependant pas de moyen de contrôler/mesurer la fréquence d'un son émis. Pour ce faire, comme il est plus aisé de mesurer des longueurs (de l'ordre du centimètre au mètre) que des fréquences ou des périodes de l'ordre du centième de seconde, nous allons créer mathématiquement une longueur qui, expérimentalement, sera mesurable.

2.3 Longueur d'onde

Nous avons vu en introduction qu'une vibration « se propageait » – on parle alors de phénomène ***ondulatoire***. Même si nous n'étudierons pas la propagation des ondes, nous aurons besoin de remarquer qu'elle se fait à une certaine vitesse, ou ***célérité***, laquelle est caractéristique du milieu propagateur. Dans l'air, on parle de la « vitesse du son » qui vaut environ trois cents mètres par seconde, soit (en kilomètres par heure)

$$300\ \frac{m}{s} = \frac{300m}{s} = \frac{0,3km}{\frac{1}{3600}h} = 3600 \times 0,3\ \frac{km}{h} = 1080\ \frac{km}{h}$$

[3] ou dans toute autre unité de temps

[4] Une période est un ***t***emps, d'où la lettre ***t*** choisie.

[5] Bien sûr, rien n'empêche de dire que la fréquence de la rotation de la Terre autour du Soleil est de

$$\begin{aligned} \frac{1}{365j} &= \frac{1}{365 \times 24h} = \frac{1}{365 \times 24 \times 3600s} \\ &= \frac{1}{31\ 536\ 000}\frac{1}{s} \simeq 32 \cdot 10^{-9}\ Hz, \end{aligned}$$

soit environ trente-deux milliardième de Hertz, mais on se retrouve à utiliser des fractions, ce qui n'est pas pratique.

[6] Le lecteur pourra calculer que la période d'un tel la vaut

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{440Hz} = \frac{1}{440}s \simeq 2,3 \cdot 10^{-3}\ s,$$

soit environ deux millièmes de seconde.

mille quatre-vingt kilomètres par heure. Lorsqu'un objet franchit cette limite, appelée « ***mur du son*** », il se déplace plus vite que les ondes sonores qu'il engendre dans l'air, faisant s'entrechoquer ces dernières dans un bang assourdissant que nous connaissons bien des avions de chasse.

La ***longueur d'onde*** est (par définition) la longueur parcourue par une onde pendant une période (celle de l'onde). C'est une longueur, mesurée en mètres[7], généralement notée λ. Puisque la longueur parcourue s'exprime par le produit de la vitesse par le temps de parcours, en notant c la célérité de l'onde, on a la formule suivante

$$\lambda \overset{\text{définition}}{=} c \times T.$$

Si l'on préfère la fréquence à la période, on écrira

$$\lambda = c \times \frac{1}{f} = \frac{c}{f}.$$

Par exemple, pour un son de cinq cents Hertz (correspondant environ au *si* situé une seconde au-dessus du *la* 440), la longueur d'onde vaudra

$$\lambda = 300\ \frac{m}{s} \times \frac{1}{500\ Hz} = \frac{300}{500} \frac{m}{s \cdot Hz} = 0,6\ m.$$

Il est légitime de se demander s'il y a un rapport entre l'objet mathématique que nous avons appelé *longueur* (forcés par les unités) d'onde et la longueur « physique » d'un certain système oscillatoire.

2.4 Longueur d'onde et longueur de corde

Commençons par une remarque pessimiste : les quatre cordes d'un violon sont de même longueur et pourtant produisent (à vide) des hauteurs différentes. Il semble donc possible d'associer à une même longueur de corde autant de longueurs d'onde (de hauteurs de son) que voulu. Et bien oui. Sauf que, pour produire des résultats différents, à longueurs égales, ces cordes *doivent* être de nature différente. Mais qui nous empêche de considérer une seule et même nature de corde et d'en extraire plusieurs de longueurs différentes ?

On observera alors (mais c'est plus difficile) qu'un point fixe sur une corde vibrante oscillera toujours avec la même fréquence, quelle que soit sa position et quelle que soit la longueur de corde considérée. C'est cette oscillation qui se transmet à l'air – gardant ainsi la même fréquence – et qui va se propager jusqu'à nos tympans. La conservation de la fréquence s'écrit

$$\frac{c_{corde}}{\lambda_{corde}} = f = \frac{c_{son}}{\lambda_{son}}, \text{ d'où } \lambda_{son} = \frac{c_{son}}{c_{corde}} \lambda_{corde},$$

ce qui s'écrit encore $\lambda = \alpha L$ où

1. $\lambda = \lambda_{son}$ est la longueur d'onde du phénomène sonore ;
2. $L = \lambda_{corde}$ est la longueur de la corde ;
3. $\alpha = \frac{c_{son}}{c_{corde}}$ est une constante ne dépendant que de la nature de la corde utilisée.

Finalement, nous pouvons énoncer, qu'*étant donnée une nature de corde,*

> *la longueur d'onde (définie mathématiquement) est proportionnelle à*
> *la longueur de la corde qui, une fois pincée, produira le son ayant cette longueur d'onde.*

[7]ou toute autre unité de longueur plus adéquate. La longueur d'onde typique de la lumière tourne autour de la centaine de nanomètres.

2.5 Une première interprétation

Les instrumentistes à cordes ont tous remarqué qu'en faisant glisser un doigt le long d'une corde la hauteur du son produit variait continûment, vers le haut si l'on déplace le doigt en direction du chevalet. Un archet faisant vibrer la corde entre le chevalet (fixe) et le doigt, cela revient à dire que la hauteur du son augmente lorsque la longueur d'onde diminue. C'est une simple ? ? ? de la formule $L \times f = c_{corde}$: puisque la célérité c de propagation dans la corde est donnée, la fréquence f augmente lorsque la longueur L diminue.

Plus précisément, que devient un son lorsque l'on double sa fréquence ? Lorsqu'on la triple, quadruple ? Toujours car $L \times f$ est constant, doubler la fréquence revient à diviser la longueur d'onde par deux, et plus généralement multiplier la fréquence par un nombre revient à diviser la longueur d'onde par ce même nombre.

Avec le langage sus-développé[8], la constatation expérimentale du début est qu'un son d'une fréquence f donnée en produit une multitude d'autres dont les fréquences sontles multiples *entiers* de f.

Il nous faudrait parler de théorie de Fourier pour donner l'explication mathématique de ce phénomène. Nous rejetons en annexe une introduction très naïve à cette théorie afin que le lecteur puisse entre-apercevoir cette explication.

3 De l'irrégularité nécessaire des intervalles tempérés

Expliquons à présent pourquoi la ***gamme tempérée*** utilisée de nos jours au clavier est nécessairement fausse.

Cette partie comporte un certains nombre de calculs, tous détaillés et commentés, afin de quantifier les différences subtiles entre les harmoniques pures et les notes tempérées.

En particulier, nous arriverons à la conclusion que le phénomène d'enharmonie est le seul et unique responsable de la fausseté de la gamme tempérée. (On le savait déjà responsable mais l'étude qui suit permettra de lui rejeter la responsabilité *entière*[9].)

3.1 Prolégomènes

3.1.1 Rappel sur les intervalles de la gamme tempérée

La gamme tempérée est composée de six ***tons*** ou douze ***demi-tons***, répartis en cinq tons (*do-ré*, *ré-mi*, *fa-sol*, *sol-la*, *la-si*) entrecoupés de deux demi-tons (*mi-fa*, *si-do*).

Les ***dièses*** $\sharp$ et les ***bémols*** (appelés ***altérations***) permettent chacun respectivement d'augmenter et de diminuer une note donnée d'un demi-ton – ou de plusieurs s'il y a plusieurs altérations. Un ***double bémol*** sera noté $\flat\flat$, un **double dièse** est traditionnellement noté $\times$.

Un demi-ton vaut bien comme son nom l'indique la moitié d'un ton et on ne fait aucune différence entre un $^\sharp$*sol* et un $^\flat$*la* ou entre un $^\flat$*do* et un *si*, ou encore entre un $^\times$*fa* et un *sol*. Ainsi, la gamme tempérée peut être décrite comme suit :

$$\ldots,\ do,\ \binom{^\sharp do}{^\flat ré},\ ré,\ \binom{^\sharp ré}{^\flat mi},\ \binom{mi}{^\flat fa},\ \binom{^\sharp mi}{fa},\ \binom{^\sharp fa}{^\flat sol},\ sol,\ \binom{^\sharp sol}{^\flat la},\ la,\ \binom{^\sharp la}{^\flat si},\ \binom{si}{^\flat do},\ \binom{^\sharp si}{do},\ \ldots$$

En tant que *fraction* de l'octave, le ton vaut un sixième et le demi-ton un douzième. Ainsi, tous les intervalles tempérés sont une fraction douzième de l'octave et peuvent être reliés entre eux. Par exemple :

1. une ***quinte*** fait *trois tons et demi* ;
2. une ***quarte*** fait *deux tons et demi* ;
3. une ***tierce majeure*** fait *deux tons* ;

[8] en fait, tout simplement la fréquence

[9] Un mathématicien crierait au scandale. En effet, identifier deux nombres différents (dans notre cas la valeur de l'enharmonie avec zéro) revient à introduire une contradiction dans lamathématique : il serait alors aisé de démontrer n'importe quelle proposition (vraie ou fausse) et ainsi d'obtenir l'égalité entre gamme tempérée et gamme « pure ».

4. une ***tierce mineure*** fait *un ton et demi* ;
5. une ***octave*** fait *six tons* ou *trois tierces majeures* ou *quatre tierces mineures* ;
6. *douze quintes* font *sept octaves* ;
7. *douze quarte* font *cinq octaves* ;
8. *quatre quintes* font *sept tierces majeures...*

On récapitule dans le tableau ci-après le nom de ces derniers selon la fraction douzième correspondante.

Par soucis de concision, on a noté le nom d'un intervalle par le nombre de noms de notes (parmi les sept noms de note de la gamme) qu'il contient (tierce↔ 3, octave↔ 8, unisson↔ 1...) succédé d'un $m, M, +, -$ précisant le caractère respectivement mineur, majeur, augmenté, diminé. La seconde majeure est ainsi notée 2^M, la quinte augmentée 5^+ et l'octave surdiminuée 8^{--} (les intervalles suraugmentés/surdiminués sont juste là pour mieux visualiser le schéma général qui se dessine).

Par ligne, on lira la hauteur entendue (quelle fraction douzième de l'octave depuis le *do*), qui prendra autant de noms que l'on s'autorise d'altérations pour l'atteindre à partir d'autres notes (entre quatre et cinq grâce aux doubles dièses et bémols). Par colonne, le nombre de notes dans l'intervalle (en rappel) en prenant comme note de référence un *do*.

($^{\sharp}$*si* 0^{+})	*do* 1	$^{\flat\flat}$*ré* 2^{-}		quartes				
($^{\times}$*si* 0^{++})	$^{\sharp}$*do* 1^{+}	$^{\flat}$*ré* 2^{m}		↓				
	$^{\times}$*do* 1^{++}	*ré* 2^{M}	$^{\flat\flat}$*mi* 3^{-}		quintes			
↑		$^{\sharp}$*ré* 2^{+}	$^{\flat}$*mi* 3^{m}	$^{\flat\flat}$*fa* 4^{--}	↓			
(zéroièmes)	↑	$^{\times}$*ré* 2^{++}	*mi* 3^{M}	$^{\flat}$*fa* 4^{-}		sixtes		
	unièmes		$^{\sharp}$*mi* 3^{+}	*fa* 4	$^{\flat\flat}$*sol* 5^{--}	↓		
		↑	$^{\times}$*mi* 3^{++}	$^{\sharp}$*fa* 4^{+}	$^{\flat}$*sol* 5^{-}		septièmes	
		secondes		$^{\times}$*fa* 4^{++}	*sol* 5	$^{\flat\flat}$*la* 6^{-}	↓	octaves
			↑		$^{\sharp}$*sol* 5^{+}	$^{\flat}$*la* 6^{m}		↓
			tierces	↑	$^{\times}$*sol* 5^{++}	*la* 6^{M}	$^{\flat\flat}$*si* 7^{-}	
				quartes		$^{\sharp}$*la* 6^{+}	$^{\flat}$*si* 7^{m}	$^{\flat\flat}$*do* 8^{--}
					↑	$^{\times}$*la* 6^{++}	*si* 7^{M}	$^{\flat}$*do* 8^{-}
					quintes		$^{\sharp}$*si* 7^{+}	*do* 8
							$^{\times}$*si* 7^{++}	$^{\sharp}$*do* 8^{+}
								$^{\times}$*do* 8^{++}

Il serait inutile de poursuivre le tableau plus loin : il suffit en effet de recoller la dernière colonne à la première (pas la zéroième) et d'ajouter 7 à tous les noms d'intervalles.

3.1.2 Une base : les octaves

Reprenons notre tableau d'intervalles issu de l'expérience des harmoniques. L'octave est la première harmonique venant juste après la fondamentale, son rapport est donc le plus petit entier > 1, à savoir 2. Par conséquent :

doubler la fréquence augmente la hauteur d'une octave.

Ainsi, si l'on veut monter de deux octaves, on quadruplera la fréquence, et l'on multipliera cette dernière par huit ($8 = 2^3$) si l'on veut monter de trois octaves. Remarquer également que la sixième harmonique (sol^3) s'obtient en doublant la fréquence de la troisième (sol^2), mais aussi en montant d'une octave depuis cette dernière ; ou encore que la dixième (mi^4), double en fréquence de la cinquième (mi^3), est encore une octave plus haut : c'est cohérent[10].

Faisant chemin inverse, il est clair que baisser d'une octave correspond à diviser la fréquence par deux. On peut donc, à partir d'une seule note, obtenir toutes les octaves inférieures et supérieures en divisant/multipliant la fréquence de la dite note par une puissance de 2, et ce (il faut le vérifier expérimentalement) de manière parfaitement juste à notre oreille.

La richesse tonale n'est cependant pas au rendez-vous : à partir d'un *la*, on n'obtient ainsi... que des *la* !

[10] On pourra ainsi deviner toute harmonique dont l'ordre est le produit de deux entiers strictement plus grands que 1. Par exemple, la quarante-cinquième s'obtient en prenant la neuvième de la cinquième, soit un ton (et trois octaves) plus une tierce majeure (et deux octaves), soit encore une quarte augmentée (et cinq octaves).

3.1.3 Définition d'un intervalle par un rapport de fréquences

Nous avons vu qu'une octave correspondait à un rapport de fréquences de 2 (ou, si l'on descend, de $\frac{1}{2}$), et ce indépendamment de la fondamentale[11].

On définit de manière analogue (et plus générale) l'***intervalle*** entre deux notes de fréquences f et f' comme le rapport $\frac{f'}{f}$ de ces fréquences. Ainsi, ajouter (au sens de notre oreille) un intervalle à une note donnée revient à *multiplier* la fréquence associée à la dite-note par ce rapport.

La moindre des choses à vérifier est que l'intervalle ainsi mathématiquement défini est *inchangé par transposition*. Montrons-le : si deux notes quelconques sont transposées d'un même intervalle, les fréquences correspondantes vont être chacune multipliée par le même facteur (correspondant à l'intervalle), donc le *rapport* de ces fréquences reste le même – ce qu'il fallait démontrer.

En d'autres termes, un intervalle correspond bien un écart *modulo* transposition.

Notre définition distingue les intervalles montants et descendants. En effet, si l'intervalle entre deux fréquences f et f' monte, on a $f < f'$, donc le rapport $\frac{f'}{f}$ est plus grand que 1. On montre de même qu'il est plus petit que 1 si l'intervalle descend.

D'ailleurs, peut-on exprimer le facteur définissant un intervalle si l'on connaît le facteur de l'intervalle allant en sens inverse ? En notant α le facteur connu et α' le facteur cherché, on sait que monter et descendre d'un même intervalle revient à ne pas bouger, donc à multiplier les fréquences par 1. On doit donc avoir $\alpha\alpha' = 1$, soit $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$. Par conséquent,

on passe d'un intervalle montant (facteur plus grand que 1)
à un intervalle descendant (facteur plus petit que 1)
en prenant l'inverse du facteur associé (et réciproquement).

Comme nous n'aurons pas systématiquement besoin d'orienter notre intervalles (on parlera souvent de tierce ou de quinte tout court), il sera entendu que l'un ou l'autre des facteurs ci-dessus définira clairement l'intervalle dont on parlera – et l'on prendra souvent le facteur plus grand que 1.

Une dernière définition.

Dans le monde tempéré, nous savons associer à tout intervalle inférieur à une octave un autre intervalle qui ajouté au premier forme une octave.

Mathématiquement, le ***dual*** d'un intervalle défini par deux fréquences f et f' vérifiant $f < f' < 2f$ est celui défini par les fréquences f' et $2f$ (on transpose la première note d'une octave vers le haut). En termes de fréquences,

$$\textit{un facteur } \frac{f'}{f} \textit{ est transformé en le double de son inverse } \frac{2f}{f'},$$

de sorte qu'additionner un intervalle suivi de son dual revient à multiplier les fréquences par $\frac{f'}{f}\frac{2f}{f'} = 2$, soit à rajouter une octave (ouf).

3.1.4 Intervalles purs et nombres rationnels

Pour la rigueur de ce suit, nous devons distinguer deux types d'intervalles se rapportant à un même nom : ceux auxquels nous sommes habitués par notre oreille pianistique du clavier bien tempéré (qui sont des fractions douzièmes de l'octave), et ceux qui apparaissent de manière physique à travers les harmoniques de notre première expérience. Nous nommerons les premiers ***tempérés*** et les seconds ***purs***.

Par exemple, c'est un fait expérimental pour notre oreille que l'octave pure vaut exactement l'octave tempérée. On parlera donc tout simplement d'octave.

Voyons à présent la mesure des intervalles purs. Ces derniers étant définis entre notes dont les fréquences sont toutes multiples d'une même fréquence fondamentale, il sera aisé de les mesurer.

Plus précisément : étant donnés deux entiers $1 \leq a < b$, *que vaut l'intervalle pur situé entre l'harmonique d'ordre a et celle d'ordre b ?*

[11] Nous n'avons attiré l'attention sur ce fait, mais c'est le moment.

Appelons f la fréquence de la fondamentale. Les fréquences des notes considérées valent af et bf, donc forment un facteur $\frac{b}{a}$. Bilan (et réponse) : *la fréquence est multipliée par* $\frac{b}{a}$*.* Il est rassurant que ce résultat ne dépend pas de la fondamentale : la quinte, intervalle séparant deuxième et troisième harmoniques, doit bien être la même pour tout le monde !

Par ailleurs, on constate qu'un intervalle pur est toujours un nombre ***rationnel***[12] (positif). Réciproquement, pour entendre un intervalle rationnel $\frac{b}{a}$ (avec a et b entiers naturels), il suffit d'écouter (sur la base de n'importe quelle fondamentale) l'écart entre les notes des harmoniques d'ordres a et b. Évidemment, plus la fraction est compliquée, *i. e.* plus a et b sont grands, plus il faut aller écouter loin les harmoniques, ce qui n'est pas chose aisée à réaliser.

Assez de généralités : des exemples.

3.2 Mesures des intervalles purs apparaissant dans les douze premières harmoniques, comparaison au ton tempéré

3.2.1 Le ton tempéré

Afin de comparer les intervalles tempérés aux intervalles purs, nous aurons besoin de tout exprimer en termes de rapports de fréquences.

Que vaut alors le ton, au sens de son facteur multiplicateur de fréquences ? Appelons α ce dernier. Une octave se composant de six tons, multiplifier les fréquences par 2 revient à multiplier six foix par α, ce qui s'écrit $\alpha^6 = 2$, soit $\alpha = \sqrt[6]{2} \simeq 1,12$.

N. B. : les maths, ça sait (parfois) être concis.

Complément esthétique.

Montrons pourquoi ce ton tempéré *ne peut pas* apparaître dans les harmoniques. Si c'était le cas, le facteur $\sqrt[6]{2}$ correspondrait à un intervalle pur, donc serait rationnel, donc son cube $\sqrt{2}$ également. Et ça, on sait que ce n'est pas possible depuis l'école de Pythagore : la diagonale du carré de côté 1 est irrationnelle.

Et l'on a mieux : le rapport $\sqrt[6]{2}$, certes irrationnel comme $\sqrt{2}$, est impossible (contrairement à ce dernier) à construire à la règle et au compas. Sinon, son carré $\sqrt[3]{2}$ le serait, et l'on sait depuis Galois que la trisection du cube est impossible à résoudre (problème posé selon la légende par l'Oracle de Delphe demandant de construire un cube dont le volume serait exactement 2, son arête devant valoir $\sqrt[3]{2}$).

3.2.2 Les intervalles purs

Tous les noms d'intervalles ci-après sont purs. Pour les repères, on prend un *do* pour fondamentale.

La quinte, située entre harmoniques d'ordre 2 et 3 (*do*-*sol*), s'obtient en multipliant par $\frac{3}{2}$ (pour monter d'une quinte) ou en divisant par $\frac{3}{2}$ (pour descendre), division qui revient à multiplier par $\frac{2}{3}$. On la trouve également entre les ordres 6 et 4, d'où un facteur $\frac{6}{4}$, ou encore entre les ordres 8 et 12 avec un facteur $\frac{12}{8}$. Ces trois facteurs sont égaux puisqu'ils correspondent à une même quinte transposée (ou pas) d'une ou deux octaves.

La quarte correspond au facteur $\frac{4}{3}$ (*sol*-*do* entre ordres 3 et 4) ou bien $\frac{3}{4}$. Elle se retrouve entre ordes 6 et 8.

La tierce majeure à $\frac{5}{4}$ (*do*-*mi* entre ordres 4 et 5 ou entre ordres 8 et 10)

La sixte majeure à $\frac{5}{3}$ (*sol*-*mi* entre ordres 3 et 5 ou 6 et 10).

La tierce mineure à $\frac{6}{5}$ (*mi*-*sol* entre ordres 5 et 6) mais aussi à $\frac{7}{6}$ (*sol*-$^\flat$*si* entre ordres 6 et 7), ce qui commence déjà à poser problème.

D'ailleurs, la sixte majeure se trouve également ($^\flat$*si*-*sol*) entre les ordres 7 et 12, d'où un facteur $\frac{12}{7}$ devant égaler le $\frac{5}{3}$ précédemment obtenu.

De même, à la tierce majeure se trouve également associés les facteurs $\frac{9}{7}$ ($^\flat$*si*-*ré*) et $\frac{11}{9}$ (*ré*-$^\sharp$*fa*).

Bref, c'est la pagaille. Et si l'on parle de la seconde, du fameux ton, elle apparaît

1. en les ordres 7 et 8 ($^\flat$*si*-*do*)
2. en les ordres 8 et 9 (*do*-*ré*),

[12] sous la forme d'un *ratio*, d'une fraction

3. en les ordres 9 et 10 (*ré-mi*),
4. en les ordres 10 et 11 (*mi-*$\sharp$*fa*),

d'où *quatre* facteurs interchangeables $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ et $\frac{11}{10}$.

Mentionnons enfin le demi-ton, lequel apparaît pour la première fois entre les onzième et douzième harmoniques ($\sharp$*fa-sol*), d'où un facteur de $\frac{12}{11}$.

Il semble donc exister, en dehors des octaves, quintes et quartes, *plusieurs* intervalles purs portant le même nom.

Récapitulons toutes les possibilités que nous avons vu apparaître dans les douze[13] premières harmoniques :

nom de l'intervalle	facteur(s) associé(s)
octave	2
quinte	$\frac{3}{2}$
quarte	$\frac{4}{3}$
tierce majeure	$\frac{5}{4}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{11}{9}$
tierce mineure	$\frac{6}{5}$ $\frac{7}{6}$
ton	$\frac{8}{7}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{10}{9}$ $\frac{11}{10}$
demi-ton	$\frac{12}{11}$

Voyons comment ces intervalles purs se rapprochent des intervalles tempérés.

3.2.3 Rappels sur le logarithme

Comme nous l'avons vu, il va falloir jongler entre l'*addition* des intervalles (que nous manipulons bien) et la *multiplication* des fréquences (qui explique bien les choses).

On sait que l'exponentielle permet de transformer celles-là en celles-ci : on a

$$2^{u+v} = 2^u \times 2^v \text{ pour tous nombres entiers } u \text{ et } v$$

et cela reste vrai en remplaçant les puissances entières par n'importe quels autre nombres ainsi que la base 2 par n'importe quel nombre β strictement positif :

$$\beta^{u+v} = \beta^u \beta^v.$$

Réciproquement, l'outil mathématique *ad hoc* pour transformer produits en sommes est le ***logarithme***. On le note ln[14] et il vérifie

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \text{ pour tous nombres } a \text{ et } b \text{ strictement positifs.}$$

Prenant $b = a$, on voit que $\ln\left(a^2\right) = 2\ln a$, puis en prenant $b = a^2$ on obtient $\ln\left(a^3\right) = 3\ln a$, ce qui permet d'intuiter la formule

$$\ln(a^p) = p\ln a \text{ pour toute puissance } p$$

qui se trouve être valide.

Rappelons également que la ***racine*** n-ième d'un nombre a positif s'écrit $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, ce qui permet d'obtenir son logarithme

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a.$$

[13] il y en aurait certainement d'autres en écoutant les harmoniques plus lointaines

[14] pour « ***l***ogarithme ***n***épérien », du nom de *Neper*, ou encore « ***l***ogarithme ***n***aturel »

3.2.4 Pourquoi les intervalles tempérés sont faux

Comment comparer les intervalles purs à ceux tempérés ? On pourrait raisonner uniquement sur les fréquences, mais il est plus aisé de raisonner en termes de fractions d'octave (en additif plutôt qu'en multiplicatif) car l'on dispose d'une unité à laquelle nous sommes habitués : le ton (tempéré).

La question qui se pose est alors : étant donné un intervalle de facteur multiplicateur α, combien de tons peut-on caser dedans ? Notant x ce nombre de tons, ajouter x tons doit donner l'intervalle de facteur α, donc multiplier les fréquences x fois par $\sqrt[6]{2}$ doit donner α, ce qui s'écrit $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^x = \alpha$, d'où en prenant le logarithme $\frac{x}{6}\ln 2 = \ln\alpha$, soit encore

$$x = 6\frac{\ln\alpha}{\ln 2}.$$

Reprenons les mesures des intervalles purs en rajoutant d'une part la fraction de ton arrondie au centième (grâce à la formule ci-dessus), d'autre part la fraction de ton de l'intervalle tempéré associé (la colonne de gauche rappelle les facteurs mesurant les intervalles purs) :

facteur multiplicatif	nom d'intervalle	nombres de tons	
2	octave	$6,00$	6
$\frac{3}{2}$	quinte	$3,51$	$3,5$
$\frac{4}{3}$	quarte	$2,49$	$2,5$
$\frac{5}{4}$	tierce majeure 1	$1,93$	2
$\frac{9}{7}$	tierce majeure 2	$2,18$	2
$\frac{11}{9}$	tierce majeure 3	$1,74$	2
$\frac{6}{5}$	tierce mineure 1	$1,58$	$1,5$
$\frac{7}{6}$	tierce mineure 2	$1,33$	$1,5$
$\frac{8}{7}$	ton 1	$1,56$	1
$\frac{9}{8}$	ton 2	$1,02$	1
$\frac{10}{9}$	ton 3	$0,91$	1
$\frac{11}{10}$	ton 4	$0,83$	1
$\frac{12}{11}$	demi-ton	$0,75$	$0,5$

.

Quelques commentaires.

La quarte et la quinte sont justes à moins d'un centième de ton près.

La tierce majeure qui s'approche le mieux de celle tempérée est celle de facteur $\frac{5}{4}$. Elle est la seule à valoir deux tons à moins d'un dixième de ton près. De même pour la tierce mineure de facteur $\frac{6}{5}$ (celle $\frac{7}{6}$ est de toute façon hors jeu).

Concernant les tons, seuls ceux de facteurs $\frac{9}{8}$ et $\frac{10}{9}$ approchent le ton tempéré à moins d'un dixième de ton près, mais l'erreur du $\frac{9}{8}$ (moins d'un cinquantième de ton) est quatre fois moindre que celle du $\frac{10}{9}$.

Le demi-ton est quant à lui complètement faux.

Voyons à présent d'autres façons d'approcher la gamme tempérée. Elle ont leur intérêt historique et surtout dévoilent des subtilités harmoniques que le tempérament égal nous a fait oublier.

4 Les trésors harmoniques cachés par le tempérament égal

4.1 Une autre base : la quinte

L'intérêt considérable de la quinte (tempérée) par rapport à l'octave est qu'elle permet de récupérer *toutes* les notes du clavier[15]. Tout pianiste s'est amusé à jouer la suite

$$^\flat la\ ^\flat mi\ ^\flat si\ fa\ do\ sol\ ré\ la\ mi\ si\ ^\sharp fa\ ^\sharp do\ ^\sharp sol$$

[15] Autrement dit, toute note s'écrit comme un multiple de 7 demi-tons (= une quinte) plus ou moins un multiple de 12 demi-tons (= une octave). Le matheux connaisseur de Bézout pour comprendre cela du fait de la primalité relative de 7 et 12.

dans un sens ou dans l'autre, en montant ou en descendant, en bouclant le $\sharp$*sol* sur le $\flat$*la*, au grand dam des professeurs d'harmonie. Voyons, afin de sauvegarder l'intégrité de ces derniers, ce qui se passe au niveau des fréquences.

Arriver douze quintes (pures) plus haut, c'est multiplier par $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$, soit par un facteur 130 environ (arrondi à l'unité). Si un $\sharp$*sol* valait un $\flat$*la*, douze quintes pures vaudraient aussi sept octaves pures[16], donc multiplier par $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \simeq 130$ reviendrait à multiplier par $2^7 = 126$. Et ce n'est pas tout à fait pareil.

Plus précisément, l'intervalle entre $\sharp$*sol* et $\flat$*la* vaut le rapport des deux $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,0136$ qui est très proche de 1 (mais différent). C'est ce tout petit intervalle qui mesure la différence entre un $\flat$*la* et un $\sharp$*sol* : on l'appelle ***enharmonie***.

Mais à quel point est-ce audible ? Raisonnons en additif pour mesurer la fraction de ton contenue dans l'enharmonie : la formule du paragraphe précédent nous dit ce cette fraction vaut $6\frac{\ln\frac{3^{12}}{2^{19}}}{\ln 2} \simeq 0,117$, soit une fraction de ton comprise entre $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{8}$. C'est petit, mais audible sur un instrument à corde.

De façon concrête, voyons quel problème rencontre un accordeur de piano. Il prend une note de base qu'il accorde arbrairement (généralement le *la* 440), puis il accorde toutes les octaves correspondantes. Ensuite, il choisit une quinte à partir de la première note, mettons *mi*, il accorde un *mi* comme une quinte juste à partir d'un *la*, puis il accorde tous les autres *mi* à l'octave (c'est plus facile que d'accorder la quinte pour chaque *mi*). Puis il prend une quinte à partir du *mi*, disons *si*, et il recommence. Ainsi, sur le clavier vont se trouver accordées toutes les notes suivant une suite de quintes. Le malheur arrive aux bout de douze quintes : si l'accordeur a *vraiment* accordé les quintes de façon juste, il ne pourra pas renfermer le cercle des quintes ! Il doit donc accorder les quintes un tout petit peu en dessous de la quinte juste (précisément un douzième d'enharmonie, ce qui est proprement inaudible) afin de retomber sur ses pieds au bout du cycle.

Voyons plus en détail comment nous pourrions, en dépit de l'enharmonie, fonder notre gamme uniquement sur les quintes. (Rappelons que la quinte est le premier intervalle consonnant après l'octave ainsi que la seule harmonique pratiquement audible).

4.2 La gamme de Pythagore

Reprenons notre suite où apparaissent toutes les notes du clavier :

$$\flat la\ \flat mi\ \flat si\ fa\ do\ sol\ ré\ la\ mi\ si\ \sharp fa\ \sharp do\ \sharp sol$$

Elle permet de définir n'importe quel intervalle en termes de quintes (pures) et d'octaves, soit à l'aide de facteurs 2 et $\frac{3}{2}$.

Nous allons mesurer ces derniers, d'une part en facteurs multiplicatifs, d'autre part en fractions de ton.

Regardons les intervalles depuis le $\flat$*la*. Tous les facteurs seront arrondis au millième.

1. Commençons par le tout dernier, que nous avons déjà rencontré et que nous verrons réapparaître tout le long : la seconde diminuée $\flat$*la*-$\sharp$*sol* n'est autre que l'enharmonie, de facteur $\frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,014$.
2. Le premier $\flat$*la*-$\flat$*mi* est la quinte, de facteur $\frac{3}{2} = 1,500$.
3. La seconde majeure $\flat$*la*-$\flat$*si* vaut deux quintes moins une octave, donc s'obtient en multipliant la fréquence par $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} = 1,125$.
4. La tierce mineure $\flat$*la*-*fa* correspond à trois quintes moins deux octaves, soit à un facteur $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{2^2} = \frac{3^3}{2^5}$ dont il faut prendre l'inverse $\frac{2^5}{3^3} \simeq 1,185$ pour avoir une tierce *montante*.
5. La tierce majeure $\flat$*la*-*do* vaut quatre quintes moins deux octaves, donc est de facteur $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{2^2} \simeq 1,266$.
6. La seconde mineure $\flat$*la*-*sol* vaut cinq quintes moins trois octaves, d'où un facteur (une fois remis dans le bon sens) $\frac{2^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^5} \simeq 1,053$. Selon la terminologie traditionnelle, il s'agit là d'un demi-ton ***diatonique***[17].

[16] le voir sur le clavier, ou bien remarquer que, une octave devant faire six tons tempérés et une quinte 3, 5, sept octaves (tempérées) font $7 \times 6 = 42$ tons tout comme douze quintes (tempérées) font $12 \times 3,5 = 42$ tons

[17] on pourra retenir la décomposition *dia / tonique* selon *deux / noms de notes*

7. La quarte augmentée $^\flat$*la-ré* donne un facteur $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{2^3} \simeq 1,424$. Quelle différence entre deux quartes augmentées et une octave ? Prenant des notes, quelle différence entre $^\flat$*la-ré-*$^\sharp$*sol* et $^\flat$*la-*$^\flat$*la* ? La même qu'entre $^\sharp$*sol* et $^\flat$*la*, soit une enharmonie.

8. La seconde mineure $^\flat$*la-la* donne $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7}{2^4} \simeq 1,068$. Nous avons ici un demi-ton ***chromatique***[18], qui est en effet plus grand que le $^\flat$*la-sol* diatonique ($\simeq 1,053$). Comparons ces deux secondes mineures. La différence entre *do-*$^\flat$*ré* et *do-*$^\sharp$*do* est $^\flat$*ré-*$^\sharp$*do*, soit une enharmonie.

9. La quinte augmentée $^\flat$*la-mi* a pour facteur $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^8}{2^4} \simeq 1,602$. Comparons à la sixte mineure, obtenue comme dual de la tierce majeure, par exemple $^\flat$*la-*$^\flat$*fa*. La différence est encore une enharmonie (*mi-*$^\flat$*fa*)

10. La seconde augmentée $^\flat$*la-si* a pour facteur $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^9}{2^5} = \frac{3^9}{2^{14}} \simeq 1,201$. Quelle différence à la tierce mineure $^\flat$*la-*$^\flat$*do* ? Encore une enharmonie (*mi-*$^\flat$*fa*).

11. La tierce diminuée $^\flat$*la-*$^\sharp$*fa* a pour facteur $\frac{2^6}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10}} \simeq 1,110$. Comparée à la seconde majeure $^\flat$*la-*$^\flat$*sol*, on trouve encore une enharmonie ($^\sharp$*fa-*$^\flat$*sol*).

12. La tierce augmentée $^\flat$*la-*$^\sharp$*do* a pour facteur $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{11}}{2^6} \simeq 1,352$. Comparant à la quarte $^\flat$*la-*$^\flat$*ré*, on voit encore une enharmonie ($^\sharp$*do-*$^\flat$*ré*).

Bilan des courses : si l'on néglige l'enharmonie, alors *tous* les écarts ci-dessus (où serait apparu ce fameux facteur $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ si l'on avait raisonné en terme de rapports de fréquences[19]) deviennent nuls, ce qui revient *exactement* à identifier intervalles purs et tempérés.

La conclusion qui s'impose est donc la suivante :

l'enharmonie est l'unique cause de la différence
entre les intervalles purs issus de la quinte
et les intervalle tempérés.

Petite note historique.

C'est à partir de la quinte que Pythagore a défini la gamme que l'on connaît : *do ré mi fa sol la si do*.

Il s'est cependant arrêté au *si*, sans doute car le $^\sharp$*fa* ne trouvait pas se place dans la gamme précédente. Et pour cause : il n'y pas d'altérations en *do* majeur ! La modulation (au sens moderne) était donc impensable.

Toutefois, en commençant la gamme ci-dessus sur une autre note que *do*, on obtenait différents « modes » : par exemple, partant de *ré*, on obtient du *ré* mineur sans sixte mineure ni sensible (mélodique ascendant privé de sensible ou mélodique descendant privé de sixte mineure). Chaque mode est caractérisé par la place des demi-tons par rapport aux tons. Ainsi, en notant T un ton et D un demi-ton, le mode de *do* correspond à la suite TTDTTTD, le mode de *ré* à TDTTTDT, le mode de *mi* à DTTTDTT, etc., d'où autant de modes que de permutations cycliques de la suite TTDTTT.

Cela fait (théoriquement) sept modes, un par note, avec l'impossibilité de passer d'un mode à un autre, autrement dit de moduler, sans rajouter d'altérations. En effet, si l'on transpose (au sens moderne) les modes en prenant une note de base commune (mettons *do*), voici les altérations qui apparaîtraient :

1. *do ré mi fa sol la si do* (mode de *do* ou gamme majeure)
2. *do ré* $^\flat$*mi fa sol la* $^\flat$*si do* (mode de *ré*)
3. *do* $^\flat$*ré* $^\flat$*mi fa sol* $^\flat$*la* $^\flat$*si do* (mode de *mi*)
4. *do ré mi* $^\sharp$*fa sol la si do* (mode de *fa*)
5. *do ré mi fa sol la* $^\flat$*si do* (mode de *sol*)
6. *do ré* $^\flat$*mi fa sol* $^\flat$*la* $^\flat$*si do* (mode de *la* ou gamme mineure mélodique descendant)
7. *do* $^\flat$*ré* $^\flat$*mi fa* $^\flat$*sol* $^\flat$*la* $^\flat$*si do* (mode de *si*)

[18]pour changer la hauteur sans modifier le nom de note, on *colore* ce dernier
[19]Le lecteur est encouragé à écrire les calculs, il ne s'agit que de fractions avec des 2 et des 3 !

4.3 Comparaison avec le tempérament égal

La gamme de Pythagore possède un point en commun avec la gamme tempérée : *les quatre tons sont égaux* (de facteur multiplicatif $\frac{9}{8}$) *ainsi que les deux demi-tons* (*mi*-*fa* fait une quarte moins une tierce majeure, soit un facteur $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{2^8}{3^5}$ qui est le facteur de la seconde mineure *si*-*do*). On retrouve la subdivision de la gamme en deux type d'intervalles, les tons et les demi-tons.

En revanche, au contraire de la gamme tempérée, le demi-ton ne vaut pas la moitié d'un ton !

Pour embrasser les différences qui en résultent, récapitulons les données collectées dans un tableau.

Les intervalles apparaissent dans l'ordre des quintes étudié ci-dessus, avec les intervalles duaux associés[20]. Observer que tous les intervalles tempérés usuels[21] apparaissent dans les sept premières lignes et qu'à partir de la huitième ligne seuls des intervalles augmentés ou diminués sont présents. En ce sens, les intervalles usuel sont plus consonnants que leurs acolytes augmentés/diminués.

Les facteurs sont respectivement présentés sous forme d'un quotient de puissances de 2 et 3, d'une fraction irréductible, d'une valeur approchée au millième.

Les colonnes du milieu indiquent le nombre de tons tempérés contenus dans l'intervalle (arrondi au centième). Deux nombres côte à côte ont pour somme 6 puisqu'un intervalle plus son dual fait une octave, soit six tons.

Observer que les secondes majeure, mineure et diminuée correspondent respectivement aux ton, demi-ton diatonique et enharmonie. Le demi-ton chromatique correspond à la unième augmentée.

facteur multiplicatif				nombre de tons			facteur multiplicatif		
$\frac{3^1}{2^1}$	$\frac{3}{2}$	$1,500$	quinte	$3,51$	$2,49$	quarte	$1,333$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2^2}{3^1}$
$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{9}{8}$	$1,125$	seconde majeure	$1,02$	$4,98$	septième mineure	$1,778$	$\frac{16}{9}$	$\frac{2^4}{3^2}$
$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{32}{27}$	$1,185$	tierce mineure	$1,47$	$4,53$	sixte majeure	$1,688$	$\frac{27}{16}$	$\frac{3^3}{2^4}$
$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{81}{64}$	$1,266$	tierce majeure	$2,04$	$3,96$	sixte mineure	$1,580$	$\frac{128}{81}$	$\frac{2^7}{3^4}$
$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{256}{243}$	$1,053$	seconde mineure	$0,45$	$5,55$	septième majeure	$1,899$	$\frac{243}{128}$	$\frac{3^5}{2^7}$
$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{729}{512}$	$1,424$	quarte augmentée	$3,06$	$2,94$	quinte diminuée	$1,405$	$\frac{1\ 024}{729}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$
$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{2\ 187}{2\ 048}$	$1,068$	unième augmentée	$0,57$	$5,43$	octave diminuée	$1,873$	$\frac{4\ 096}{2\ 187}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$
$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{6\ 561}{4\ 096}$	$1,602$	quinte augmentée	$4,08$	$1,92$	quarte diminuée	$1,249$	$\frac{8\ 192}{6\ 561}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$
$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{19\ 583}{16\ 384}$	$1,201$	seconde augmentée	$1,59$	$4,41$	septième diminuée	$1,665$	$\frac{32\ 768}{19\ 583}$	$\frac{2^{15}}{3^9}$
$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{65\ 536}{59\ 049}$	$1,110$	tierce diminuée	$0,90$	$5,10$	sixte augmentée	$1,802$	$\frac{59\ 049}{32\ 768}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$
$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{177\ 147}{131\ 072}$	$1,352$	tierce augmentée	$2,61$	$3,39$	sixte diminuée	$1,480$	$\frac{262\ 144}{177\ 147}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$
$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{531\ 441}{524\ 288}$	$1,014$	seconde diminuée	$0,12$	$5,88$	neuvième diminuée	$1,973$	$\frac{1\ 048\ 576}{531\ 441}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$

Voici à présent un tableau où l'on a classé les données ci-dessus par ordre croissant de fractions de ton tempéré, en incorporant les multiples entiers du **demi-ton tempéré**, lesquels sont notés en gras (comme points de repères).

Les *intervalles usuels* sont mis en italique.

Nous avons également rajouté la septième augmentée, qui va de pair avec la neuvième diminuée déjà présente comme dual de l'enharmonie, et dont la fraction de ton correspondante vaut celle de l'enharmonie plus 6 (une octave).

[20] On rappelle que le produit des rapports d'un intervalle et de son dual vaut 2.
[21] comprendre : qui ne sont pas augmentés ou diminués

La note de référence est le *do*.

$^{\flat\flat}$*ré*	seconde diminuée (enharmonie)	$-0,12$
do	*unisson* = **zéro ton**	$\boxed{0,00}$
$^{\sharp}$*si*	enharmonie	$0,12$
$^{\flat}$*ré*	*seconde mineure* (demi-ton diatonique)	$0,45$
	demi-ton	$\boxed{0,50}$
$^{\sharp}$*do*	unième augmentée (demi-ton chromatique)	$0,57$
$^{\flat\flat}$*mi*	tierce diminuée	$0,90$
	ton	$\boxed{1,00}$
ré	*seconde majeure*	$1,02$
$^{\flat}$*mi*	*tierce mineure*	$1,47$
	ton et demi	$\boxed{1,50}$
$^{\sharp}$*ré*	seconde augmentée	$1,59$
$^{\flat}$*fa*	quarte diminuée	$1,92$
	deux tons	$\boxed{2,00}$
mi	*tierce majeure*	$2,04$
fa	*quarte*	$2,49$
	deux tons et demi	$\boxed{2,50}$
$^{\sharp}$*mi*	tierce augmentée	$2,61$

$^{\flat}$*sol*	quinte diminuée	$2,94$
	triton	$\boxed{3,00}$
$^{\sharp}$*fa*	quarte augmentée	$3,06$
$^{\flat\flat}$*la*	sixte diminuée	$3,39$
	trois tons et demi	$\boxed{3,5}$
sol	*quinte*	$3,51$
$^{\flat}$*la*	*sixte mineure*	$3,96$
	quatre tons	$\boxed{4,00}$
$^{\sharp}$*sol*	quinte augmentée	$4,08$
$^{\flat\flat}$*si*	septième diminuée	$4,41$
	quatre tons et demi	$\boxed{4,50}$
la	*sixte majeure*	$4,53$
$^{\flat}$*si*	*septième mineure*	$4,98$
	cinq tons	$\boxed{5,00}$
$^{\sharp}$*la*	sixte augmentée	$5,10$
$^{\flat}$*do*	octave diminuée	$5,43$
	cinq tons et demi	$\boxed{5,50}$
si	*septième majeure*	$5,55$
$^{\flat\flat}$*ré*	neuvième diminuée	$5,88$
do	*octave* = **six tons**	$\boxed{6,00}$
$^{\sharp}$*si*	septième augmentée	$6,12$

.

Observer que ce tableau est composée de blocs de trois lignes chacun centré sur un nombre entier de demi-tons tempérés et contenant exactement un nom d'intervalle usuel (exception faite du triton[22] associé à la quinte diminuée et à la quarte augmentée). Voir aussi que les trois fractions de tons au sein d'un même bloc sont très proches. En contractant chacun de ces blocs, on obtient la gamme tempérée (avec les identifications abusives trop souvent entendus) :

$^{\flat\flat}ré = do = {}^{\sharp}si$	unisson	0
$^{\flat}ré = {}^{\sharp}do \ (= {}^{\times}si)$	seconde mineure	0, 5
$^{\flat\flat}mi = ré \ (= {}^{\times}do)$	seconde majeure	1
$^{\flat}mi = {}^{\sharp}ré \ \left(= {}^{\flat\flat}fa\right)$	tierce mineure	1, 5
$^{\flat}fa = mi \ (= {}^{\times}ré)$	tierce majeure	2
$fa = {}^{\sharp}mi \ \left(= {}^{\flat\flat}sol\right)$	quarte	2, 5
$^{\flat}sol = {}^{\sharp}fa \ (= {}^{\times}mi)$	triton	3
$^{\flat\flat}la = sol \ (= {}^{\times}fa)$	quinte	3, 5
$^{\flat}la = {}^{\sharp}sol$	sixte mineure	4
$^{\flat\flat}si = la \ (= {}^{\times}sol)$	sixte majeure	4, 5
$^{\flat}si = {}^{\sharp}la \ \left(= {}^{\flat\flat}do\right)$	septième mineure	5
$^{\flat}do = si \ (= {}^{\times}la)$	septième majeure	5, 5
$^{\flat\flat}ré = do \ \left(= {}^{\sharp}si\right)$	octave	6

.

On pourrait également compléter les anciens blocs de trois à l'aide des notes sus-parenthésées de façon à avoir systématiquement trois (voire quatre) noms de notes dans un même bloc, à l'instar des $^{\flat\flat}$*ré*, *do* et $^{\sharp}$*si*. Il suffit pour cela de prolonger le tableau des quintes afin de faire apparaître des noms d'intervalles et de notes de plus en plus élaborés, tels qu'ils apparaissent dans le premier tableau listant les intervalles tempérées.

En tout état de cause, nous espérons avoir montré comment la simple indifférence vis-à-vis de l'enharmonie occulte complètement toute la richesse apportée par cette dernière : au lieu de boucler au bout de douze quintes,

[22] qui n'a rien à voir avec les batraciens

on pourra différencier une seconde augmentée *do*-$\sharp$*ré* de la tierce mineure *do*-$\flat$*mi* associée afin de la penser comme appogiature de la tierce majeure *do-mi*, le demi-ton diatonique $\sharp$*ré-mi* rendant bien mieux la tension en direction du *mi* plutôt que son analogue chromatique (qui va plutôt vers le *ré*).

Le problème de l'accordeur sus-évoqué montre cependant qu'il est impossible de rendre toute cette richesse sur un clavier. On peut quand même se risquer à accorder les douzes notes du clavier selon le cycles des quintes, par exemple (en tentant d'équilibrer dièses et bémols)

$$\flat mi\ \flat si\ fa\ do\ sol\ ré\ la\ mi\ si\ \sharp fa\ \sharp do\ \sharp sol.$$

Cela permet de jouer de manière juste dans les tonalités voisines de *do* majeur. On pourra ainsi aller jusqu'à trois dièses à la clef en *la* majeur ou deux bémols en *sol* mineur. Mais l'enharmonie va créer des intervalles faux : par exemple, en $\sharp fa$ mineur, la quinte $\sharp$*sol*-$\sharp$*ré* sonnera comme une sixte diminuée $\sharp$*sol*-$\flat$*mi*, donc avec une enharmonie en plus. Comme la quinte supporte très mal la fausseté, cet écart supérieur au neuvième de ton va s'entendre : c'est la fameuse ***quinte du loup***, responsable du surnom donné par les joueurs de luth baroques à la tonalité $\sharp fa$ mineur : « the Goat's key ».

On voit ainsi qu'en accordant un clavier de cette manière, chaque tonalité (surtout les extrèmes) aura une couleur différente selon ses problèmes harmoniques internes. Cette remarque ne saurait évidemment porter ne serait-ce qu'une partie du poids des explications historiques mais pourrait éclairer la tradition culturelle – par exemple, pourquoi $\sharp fa$ mineur était une tonalité associée aux expériences douloureuses ou extraordinaires.

4.4 Les tempéraments mésotoniques

Nous avons vu les avantages de la gamme de Pythagore : une quinte et quarte juste, une subdivision régulière de l'octave en quatre tons et deux « demi-tons », ainsi qu'une possibilité de moduler dans des tonalités pas trop lointaines. De même, le ton (de facteur $\frac{9}{8}$) est celui que nous avons vu mieux approcher le ton tempéré et c'est le plus consonnant des ton audibles dans les harmoniques d'ordre inférieur à 6 (il est raisonnable d'exclure le ton $\frac{8}{7}$ que seule une septième harmonique permettra d'entendre).

Cependant, ce n'est pas le cas de la tierce majeure. En effet, celle de la gamme de Pythagore possède un facteur $\frac{81}{64}$, tandis que la première tierce majeure apparaissant dans les harmoniques a un facteur $\frac{5}{4}$, ce qui fait que même, si elle approche mieux les deux tons tempérés (environ $2,04$ contre $1,93$) (mais qu'avait à faire Pythagore de ces considérations modernes ?), elle sonne plus faux. De même, la sixte majeure $\frac{27}{16}$ sonne moins juste que le dual de la tierce mineure pure (de facteur $2\frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{3}$)

L'idée naturelle (due à un certain Zarlino) consiste à remplacer cette tierce *do-mi* par une tierce de facteur $\frac{5}{4}$ ainsi que la sixte majeure *do-la* par un facteur $\frac{5}{3}$, donnant la gamme dite ***naturelle*** : chaque intervalle depuis le *do* est le plus consonnant possible.

Mais alors les deux tons *do-ré* et *ré-mi* deviennent légèrement différents ainsi que *sol-la* et *la-si*, ce qui devient vraiment compliqué pour moduler. Par ailleurs, on obtient une quinte fausse entre *ré* et *la* (facteur $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{8}} = \frac{40}{27}$, soit environ $3,40$ ton tempérés).

L'idée suivante consiste à accepter de *tempérer* la quinte en la rendant fausse afin que la tierce soit plus juste, tout en gardant la relation : *quatre quintes font sept tierces majeures.* Plus la quinte sera juste, plus la tierce majeure sera fausse, et réciproquement. Il s'agit donc d'un juste *milieu* à trouver, d'où le nom de tempérament **méso*tonique***.

Le ton est alors défini comme intervalle moitié moindre de la tierce majeure. Dans une gamme de *do*, une fois placés la tierce *mi* et la quinte *sol*, on place *ré* un ton avant *mi*, puis les tons fa,*la*,*si* autour de la quinte. On obtent la gamme complète : en notant t le facteur de la tierce (donc $\sqrt{t}$ est celui du ton) et q celui de la quinte, on obtient les rapports

do	*ré*	*mi*	fa	*sol*	*la*	*si*	*do*
1	$\sqrt{t}$	t	$\frac{q}{\sqrt{t}}$	q	$q\sqrt{t}$	qt	2

avec l'égalité $q^4 = 4t$

traduisant le fait que « quatre quintes valent deux octaves plus une tierce majeure ».

Des exemples ? On verra plus bas que les gammes pythagoricienne et tempérée sont des tempérament mésotoniques.

Par construction, *les quatre tons sont égaux*, mais il est remarquable que *les deux demi-tons le sont aussi* : l'égalité des intervalles *mi*-fa et *si*-*do* s'écrit $\frac{\frac{q}{\sqrt{t}}}{t} \stackrel{?}{=} \frac{2}{qt}$, soit en élevant au carré $q^4 \stackrel{?}{=} 4t$, ce qui est la définition même du tempérament mésotonique.

Pour moduler, on met le $\sharp fa$ un ton au-dessus du mi, le $\sharp$*do* un ton au-dessus du *si*, le $\sharp$*sol* un ton au-dessus du $\sharp fa$, le $\flat$*si* un ton en-dessous du *do*, le $\flat mi$ un ton en-dessous du fa, le $\flat la$ un ton en-dessous du $\flat$*si*... Selon la quinte (ou la tierce) choisie au début, les intervalles enharmoniques seront plus ou moins faux, donnant des saveurs plus ou moins prononcées aux tonalités éloignées de celle de départ.

Si l'on veut neutraliser l'enharmonie, il faut égaliser le $\flat la$ avec le $\sharp sol$, ce qui s'écrit $\frac{2}{t} = t^2$, soit $t^3 = 2$, signifiant que l'octave est composée de trois tierces majeures : on retrouve le tempérament égal. Nous avons donc montré que ce dernier est le seul tempérament mésotonique qui neutralise l'enharmonie.

Par ailleurs, une quinte juste donne une tierce de rapport $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{4} = \frac{81}{64} \simeq 1,266$, qui est celle de la gamme de Pythagore. Comme les tons de cette dernière sont égaux, on en déduit qu'elle fait partie des tempéraments mésotoniques (bien qu'on n'ait rien tempéré du tout !). Si l'on se déplace maintenant vers la tierce juste, on part de $t \simeq 1,27$ pour aller vers $t = 1,25$, donc on fait décroître t, donc on fait décroître $q = \sqrt[4]{4t}$, donc on s'éloigne de la quinte juste.

Réciproquement, si l'on part d'une tierce juste, la quinte sera de rapport $\sqrt[4]{4\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{5} \simeq 1,495$: pour aller vers la quinte juste $q = 1,5$, on augmente q, donc on augmente $t = \frac{q^4}{4}$, donc on s'éloigne de la tierce juste.

Par conséquent, on retrouve ce qui était annoncé : rendre la quinte juste se fera au détriment de la justesse de la tierce et réciproquement.

5 Harmoniques et rationnels : comment mettre des intervalles purs dans une octave

Comment rendre une gamme à la fois juste et pratique ?

Nous avons étudié précédemment la justesse.

Concernant le côté pratique, oublions tout ce qui précède pour ne raisonner qu'en additif : on aime bien additionner des intervalles qui se ramènent tous à une même fraction d'octave. Rappelons par exemple que la gamme tempérée est construite en douzièmes d'octaves, tout comme la gamme pentatonique (trois tons et deux tierces mineures).

Ainsi, si un intervalle pur (on veut une gamme juste !) a un facteur $\frac{a}{b}$, on aimerait que la fraction (au sens courant) d'octave $\frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln 2}$ soit une fraction (au sens mathématique), et ce la plus simple possible (on aimerait éviter d'avoir à diviser une octave en 3749103 unités).

Là, les mathématiques interviennent : étant donné un nombre réel a, on dispose d'un algorithme simple donnant *les* fractions approchant de mieux en mieux a. Bien sûr, les fractions sont de plus en plus compliquées, mais l'intérêt est qu'elles sont *uniques* : par exemple, le nombre π est successivement approché par les fractions $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}$, le saut entre les dénominateurs 7 et 106 signifiant qu'*aucune* fraction de dénominteur < 106 approche mieux π que $\frac{333}{106}$. Il n'y aura donc pas beaucoup de choix, ce qui va expliquer que la gamme tempérée soit le compromis auquel nous sommes arrivés aujourd'hui.

Pour le lecteur curieux, on donne l'algorithme pour un nombre a compris strictement entre 0 et 1 : définir une suite (k_n) comme la partie entière de la suite (a_n) définie par son premier terme a et telle que a_{n+1} soit l'inverse de la partie fractionnaire de a_n. Puis définir des couples (p_n, q_n) d'entiers par la relations de récurrence $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = k_n \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{pmatrix}$ avec les conditions initiales $\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k_1 \end{pmatrix}$. Alors les fractions recherchées sont les $\frac{p_n}{q_n}$.

Commençons par l'exemple de la quinte. L'algorithme ci-dessus donne les approximations successives de $\frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}$:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{24}{41} \quad \frac{31}{53} \quad \frac{179}{306} \quad \cdots$$

La première fraction $\frac{1}{2}$ donne un triton horrible.

La deuxième $\frac{3}{5}$ revient, si l'on divise l'octave en 60 unités (10 par ton), à en donner 36 pour la quinte, ce qui donne un demi-ton *mi*-fa à 6 unités différent du *si*-*do* à 4 unités – pas glop.

La troisième $\frac{7}{12}$ n'est pas inconnue : c'est la gamme tempérée !

La quatrième $\frac{24}{41}$ est intéressante. Répartissant 7 unités pour les cinq tons, il reste alors 6 unités pour les deux demi-tons, d'où la quinte à trois tons plus un demi-ton diatonique ($24 = 3 \times 7 + 3$) à condition de placer ce dernier à 3 unités, donc celui chromatique à 4 unités, la somme devant faire un ton (7 unité). L'enharmonie s'exprime tout simplement par une unité (pas besoin de boucler douze quintes).

La cinquième $\frac{31}{53}$ peut être traitée de même : on distribue 9 unités pour chacun des cinq tons et 4 unités pour chacun des deux demi-tons diatoniques. La quinte tombe alors à $27 + 4$ unités, soit comme précédemment à trois tons plus un diatonique.

À partir de la sixième, il faudrait imaginer des gamme plus compliquées.

Voyons également la quarte. La fraction d'octave à approcher est $\frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}$, donc se trouve reliée à la quinte (on sait pourquoi par dualité). La liste va comme suit :

$$\frac{1}{2} \ \frac{2}{5} \ \frac{5}{12} \ \frac{17}{41} \ \frac{22}{53} \ \frac{127}{306} \ \cdots$$

Les commentaires sont exactement les mêmes – on retrouve les mêmes dénominateurs.

À présent, la tierce majeure. Les approximations de $\frac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 2}$ vont selon

$$\frac{1}{3} \ \frac{9}{28} \ \frac{19}{59} \ \frac{47}{146} \ \cdots$$

Il est remarquable que la première approximation $\frac{1}{3}$ donne la gamme tempéree. Les suivantes seront plus difficiles à commenter. Nous nous contenterons de dire que : pour $\frac{9}{28}$, en se donnant $12 \times 7 = 81$ unités, la tierce majeure vaut 27 unités au lieu des 28 de la gamme tempérée ; pour $\frac{19}{59}$, sur $57 \times 3 = 177$ unités, on en a 57 au lieu de 56.

La tierce mineure, de fraction $\frac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 2}$, se traite de même :

$$\frac{1}{3} \ \frac{1}{4} \ \frac{5}{19} \ \frac{111}{422} \ \cdots$$

La première approximation $\frac{1}{3}$ est nulle, la seconde $\frac{1}{4}$ correspond au tempérament égal. Pour $\frac{5}{19}$, se donnant $19 \times 4 = 76$ unités, la tierce mineure en fait 20 au lieu des 19 pour la tempérée ; pour $\frac{111}{422}$, on pourra comparer la tierce mineure tempérée à $\frac{105{,}5}{422}$.

L'approximation du ton est amusante : on prend celui $\frac{9}{8}$ car sa fraction

$$\frac{\ln \frac{9}{8}}{\ln 2} = 2\frac{\ln 3}{\ln 2} - 3 = 2\left(\frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}\right) - 1$$

correspond à deux quintes moins une octave. La suite va

$$\frac{1}{5} \ \frac{1}{6} \ \frac{8}{47} \ \frac{9}{53} \ \frac{26}{153} \ \cdots$$

Le $\frac{1}{5}$ est nulle, le $\frac{1}{6}$ est la gamme tempérée, le $\frac{8}{47}$ donne cinq tons plus $\frac{7}{8}$ de ton à répartir en deux diatoniques, on retrouve le $\frac{9}{53}$ apparu dans l'étude des quintes, puis $\frac{26}{153}$ donne cinq tons plus $\frac{23}{26}$ à répartir.

Quant au ton $\frac{8}{7}$, dont la fraction $\frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln 2}$ s'approche par

$$\frac{1}{5} \ \frac{5}{26} \ \frac{21}{109} \ \frac{110}{571} \ \cdots,$$

on voit des complications dès la troisième approximation (dénominateur à plus de trois chiffres), tandis que les deux premières sont carrément fausses.

Que dire de tout ca ?

Il y a une seule fraction d'octave compatible avec tous les intervalles sus-étudiés et qui n'est pas trop compliquée : le *douzième*, ce qui devrait d'autant plus nous convaincre d'adopter le tempérament égal.

Pour la culture, on pourra retenir la division en 53 unités (chacune appelé ***comma***) qui donne un modèle assez simple (et juste) de l'enharmonie : chaque ton fait 9 comma, un demi-ton diatonique (*mi-fa* ou *si-do*) en comporte 4 tandis qu'un dièse/bémol en ajoute/retire 5. L'enharmonie mesure alors un neuvième de ton, ce qui est proche de sa valeur réelle (on l'a calculée comprise entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$).

6 Annexe : théorie de Fourier

6.1 Fonctions périodiques

6.1.1 Le satellite, exemple fondamental

Prenons un cercle de rayon 1 dont le centre sera appelé O et dont on a marqué un point I.

Considérons un point mobile S sur le cercle[23], partant de I et allant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à vitesse constante 1.

Il est clair que la position du satellite est périodique. Pour trouver sa période, *i. e.* le temps que met le satellite pour faire un tour complet, il suffit de diviser la longueur parcourue par la vitesse, ce qui donne $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

On dit que le processus (on parle plutôt de ***fonction***) qui, à une longueur θ, associe la position $S(\theta)$ (prononcer « S de θ ») du satellite ayant parcouru une longueur θ est une ***fonction périodique***, de période 2π. On pourra donc écrire

$$S(\theta + 2\pi) = S(\theta) \text{ pour tout nombre } \theta.$$

Plus généralement, si f est une fonction, c'est-à-dire un processus qui à un paramètre x associe un point $f(x)$, un nombre T est appelé ***période*** de notre fonction f si on a

$$f(x+T) = f(x) \text{ pour tout nombre } x.$$

Cela signifie que la valeur de la fonction ne change pas si on ajoute au paramètre un nombre entier de fois la valeur T. On dit alors que f est une fonction ***périodique***, ou T-périodique si l'on préciser une période. Par exemple, la fonction S que nous venons de rencontrer est 2π-périodique. C'est une fonction périodique fondamentale, comme nous allons le voir.

6.1.2 Construction de fonctions périodiques

Comment construire des fonctions périodiques ? En ajoutant des fonctions périodiques admettant une période commune. Par exemple, si le robinet de votre cuisine goutte toutes les sept secondes et celui de votre salle de bain toutes les minutes, alors le même concert de gouttes se reproduira toutes les sept minutes. Ou bien, si vous partez à la neige toutes les trois ans et au soleil tous les deux ans, alors tous les six ans vous allez devoir subir une grosse dépense.

Mathématiquement, il est facile de vérifier que la somme[24] de deux fonctions T-périodiques est encore[25] une fonction T-périodique. Ainsi, $S(\theta) + 2S(5\theta)$ est 2π-périodique (en θ), mais également

$$4S(\theta) - S(3\theta) - \frac{2}{5}S(14\theta) - \sqrt{53}S(73\theta)$$

car chacune des fonctions dont on effectue la somme est 2π-périodique.

Que se passe-t-il lorsque l'on additionne $S(\theta)$ et $S(-\theta)$? Les deux satellites tournent toujours à la même vitesse, mais en sens contraire. Si l'on met bout à bout les flèches définissant leur position, la nouvelle extrémité sera toujours sur l'axe horizontal. On obtient ainsi un mouvement oscillatoire selon une seule direction, dit ***sinusoïdal***.

Nous aurons besoin du fait expérimental suivant : une vibration sinusoïdale de l'air produit un son pur *sans aucune harmonique*. Ainsi, une superposition d'harmoniques sur une fondamentale revient à superposer des sinusoïdes de fréquences toutes multiples entières de la fréquence fondamentale. C'est ce fait mathématique que nous donnera Fourier, expliquant l'observation expérimentale.

[23] S comme **s**atellite

[24] Pour ajouter des positions, associer à chacune d'entre elle une flèche partant du centre O puis mettre ces flèches bout à bout (la première partant de O) pour obtenir la position cherchée.

[25] Par définition, la somme de deux fonctions f et g envoie un nombre x sur la somme $f(x) + g(x)$. Ainsi, lorsque f et g sont T-périodiques (pour la même période T), on aura pour tout nombre x

$$[f+g](x+T) \underset{\text{de la somme}}{\overset{\text{définition}}{=}} f(x+T) + g(x+T) \underset{T\text{-périodiques}}{\overset{f \text{ et } g \text{ sont}}{=}} f(x) + g(x) \underset{\text{de la somme}}{\overset{\text{définition}}{=}} [f+g](x),$$

ce qui montre que la fonction $f+g$ est T-périodique.

6.1.3 Périodes

Fait mathématique : *si une fonction $\varphi(t)$ est T-périodique (en t), alors $\varphi(nt)$ est $\frac{T}{n}$-périodique.*
En termes de fréquences, cela s'énonce plus joliment :

si une fonction $\varphi(t)$ a une fréquence f (en t),
alors $\varphi(nt)$ a pour fréquence nf.

Preuve : en notant $\psi(t)$ pour $\varphi(nt)$, il s'agit de montrer que $\psi\left(t+\frac{T}{n}\right)=\psi(t)$ pour tout nombre t. On considère un tel t et on écrit

$$\begin{aligned}\psi\left(t+\frac{T}{n}\right) &= \varphi\left(n\times\left[t+\frac{T}{n}\right]\right)=\varphi\left(nt+n\frac{T}{n}\right)=\varphi(nt+T)\\ &= \varphi(nt) \text{ car } \varphi \text{ est } T\text{-périodique, } \textit{CQFD.}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $S(73\theta)$ est en fait $\frac{2\pi}{73}$-périodique en θ (c'est plus précis que 2π-périodique).

Et si l'on veut construire une fonction T-périodique pour une période T quelconque, il suffira de considérer $S\left(2\pi\frac{t}{T}\right)=S\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ comme fonction de t : en effet, puisque $S(t)$ est 2π-pédiodique en t, le fait mathématique ci-dessus nous dit que $S\left(\boxed{\frac{2\pi}{T}}t\right)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\boxed{\frac{2\pi}{T}}}=T$. Il est alors usuel de poser[26]

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

de sorte à écrire plus simplement $S(\omega t)$. (Ce n'est qu'une simple commodité d'écriture.)

6.1.4 Amplitudes

Il va nous falloir pour la suite comprendre l'influence des coefficients $4,-1,\frac{-2}{5},\sqrt{53}$ devant les S dans la somme

$$4\ S(\theta)-S(3\theta)-\frac{2}{5}\ S(14\theta)-\sqrt{53}\ S(73\theta).$$

Commençons par un exemple astronomique : la fonction qui à un instant donné associe la position de votre lieu de travail dans le système solaire. Farfelu ? Oui, et volontairement. Voyons cela de plus près.

En première approximation, ce lieu de travail décrit un cercle[27], le même que décrit la Terre autour du Soleil. Mais il faut aussi tenir compte, en second lieu, de la rotation de la Terre sur elle même, phénomène négligeable dans le système solaire où la Terre est – comme tout ce qu'il y a dessus – assimilée à un point, mais qui n'est plus du tout négligeable si l'on regarde la Terre de près. Ensuite, pour peu que vous changiez de ville sur un roulement de cinquante-deux jours, tout en restant dans une même région du globe, va venir s'ajouter aux deux éléments ci-dessus une correction, négligeable devant les deux premières, mais qui prend de l'importance à l'échelle d'un pays. On pourrait encore raffiner en supposant qu'au sein d'une même ville vous changez de lieu travail régulièrement, sur la base d'un roulement d'une semaine, d'où un quatrième terme correctif.

Mathématiquement, notre fonction pourra s'écrire alors comme la somme de

1. une fonction $364j$-périodique d'amplitude la distance Terre-Soleil ;
2. une fonction $1j$-périodique d'amplitude le diamètre de la Terre ;
3. une fonction $52j$-périodique d'amplitude la taille d'un pays ;
4. une fonction $7j$-périodique d'amplitude la taille d'une ville.

[26] ω est appelée ***pulsation***
[27] en fait une ellipse

Pour un observateur situé au centre du Soleil (dont l'œil est particulière exercé), la position décrite sera $364j$-périodique, semblera suivre celle d'un grand cercle (la course de la Terre). En zoomant, il verra que ce grand cercle est en fait perturbé par un petit cercle (dû à la rotation propre de la Terre), mais pas tout à fait. En zoomant encore plus, il pourra distinguer le troisième terme prépondérant, et puis le quatrième...

Nous voilà en mesure d'interpréter une fonction telle que

$$S(\theta) + \frac{1}{1000} S(18\theta) + \frac{1}{1000000} S(42\theta).$$

Son comportement principal est celui de la fonction $S(\theta)$: on dit que c'est le terme ***prépondérant***. Vient ensuite une perturbation de l'ordre du millième (c'est le coefficient $\frac{1}{1000}$), dix-huit fois plus fréquente (c'est le 18θ), puis en tout dernier une contribution de l'ordre du millionième qui est quarante-deux fois plus fréquente.

6.2 Cordes vibrantes et fonctions périodiques

Comment faire apparaître des fonctions périodiques avec des cordes vibrantes ?

Fixons-en une horizontale au repos prenant la position d'un segment de longueur L. Lorsqu'elle vibre, on peut prendre une photo à un instant donné. On obtient un motif, dont chacun des points est situé à la verticale d'un unique point du segment de départ – les extrémités restant fixes. On obtient ainsi une fonction qui, à un point du segment, associe le point de la corde situé à sa verticale (à l'instant donné). Si l'on repère les points du segment par un nombre (une abscisse) entre 0 et L et les hauteurs possibles par un nombre (éventuellement négatif) (une ordonnée), on obtient une fonction qui à un nombre entre 0 et L associe un autre nombre.

Mais que peut-on bien associer au nombre $2L$? Rien : il n'y a pas de points de la corde au repos ayant pour abscisse $2L$ puisque cette dernière ne fait que L en longueur ! On va donc prolonger notre fonction en prolongeant notre motif.

Prolongeons mentalement notre segment horizontal de départ en une droite et recopions le motif tel quel à la suite de lui-même (on dit qu'on le ***translate***) : ainsi, le motif au-dessus des points situés entre les abscisses L et $2L$ est le même que celui entre 0 et L, ou que celui entre $18L$ et $19L$, ou encore entre $-42L$ et $-41L$. On a encore une fonction comme ci-dessus mais qui cette fois donne une valeur à n'importe quel nombre. L'intérêt de cette fonction est qu'elle est, *par construction*, L-périodique : la hauteur de notre motif imaginaire ne change pas si l'on se déplace sur notre droite imaginaire d'une longueur L ou d'un multiple entier de L.

En fait, pour coller à l'expérience, il faudrait recopier le motif une fois sur deux « à l'envers » (si c'est un demi-cercle, on obtient ainsi une « vague » apparentée à une sinusoïde) : la période s'en trouve doublée par rapport à ce qui précède.

Nous avons ainsi construit une fonction $2L$-périodique associée à un son de longueur d'onde correspondant à une longueur de corde $L = c_{corde}T$. Mais cette fonction est-elle la même si l'on prend notre photo à un autre moment ?

Nous avons déjà dit plus haut que tous les points de la corde oscillaient à une même fréquence. En fait, cette oscillation est *uniforme*, de sorte que le motif décrit par la corde va osciller à cette fréquence tout en restant « identique à lui-même ». Prendre une photo lorsque l'amplitude de cette oscillation est extrémale permet donc de retrouver n'importe quelle autre photo (dont l'amplitude sera plus faible). En ce sens, c'est cette photo qui contient toute l'information de la corde vibrante, et c'est ce motif que l'on va répéter pour construire notre fonction $2L$-périodique[28].

6.3 Fourier, la pièce maîtresse manquante

Nous voilà au fin mot de l'explication.

Fixons un type de corde de célérité c_{corde}. À une note de fréquence f nous associons une corde de longueur $L = \frac{c_{corde}}{2f}$ (la longueur d'onde de la note se propageant dans la corde), laquelle définit une fonction périodique

[28] Plus précisément, en notant $f(l)$ l'ordonnée de la corde à l'abscisse l lors d'un extremum d'oscillation, alors l'ordonnée $y(l,t)$ en fonction de l'abscisse l et du temps t va s'écrire (en choisissant bien l'origine des temps)

$$y(l,t) = \sin\left(\frac{\omega_{corde}}{2} t\right) \times f(l) \quad \text{avec } \omega_{corde} = 2\pi \frac{c_{corde}}{L}.$$

de période $2L = \frac{c_{corde}}{f}$ (la période de la note dans la corde). Nous cherchons à comprendre pourquoi cette fonction est composée de plein de fonctions sinusoïdales de fréquences sonores associées[29] multiples entières de f.

Eh bien c'est là que les mathématiques interviennent. Nous avons vu comment construire des fonctions périodiques en ajoutant des fonctions « satellite » de même période avec des amplitudes arbitraires. Le miracle est que ce moyen suffit[30] à reconstituer toute fonction périodique. Joseph Fourier, en travaillant sur l'équation de la chaleur, a formulé un tel résultat : *toute fonction T-périodique s'écrit comme une somme (infinie) de fonctions de la forme*

$$A_n \; S\,(n\omega t) \;\; \text{(dépendant de } t\text{)}$$

où l'entier n prend les valeurs $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3...$ et où l'amplitude A_n tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers l'infini.

Tâchons de comprendre ce résultat sur la base de notre exemple astronomique.

Pour $n = 0$, on a une fonction constante $A_0 S\,(0)$, ce qui correspond (dans notre exemple) au centre du Soleil.

Puis on rajoute un terme $A_1 S\,(\omega t)$, qui est T-périodique, ce qui correspond (toujours dans notre exemple) à un satellite tournant autour de ce centre à une distance de l'ordre de A_1 avec une période T.

Le terme suivant $A_2 S\,(2\omega t)$ correspondant (dans notre exemple) à la rotation propre de ce satellite (d'ordre A_2 plus petit) et dont la période est $\frac{T}{2}$.

Puis le terme $A_3 S\,(3\omega t)$ revient à considérer l'oscillation de ville en ville, de période plus petite[31] et d'amplitude plus petite.

Bref, on met bout à bout des mouvements de rotation dont les périodes sont T, $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, $\frac{T}{4}$... et dont les amplitudes décroissent.

On dira exactement la même chose des termes $A_{-1} S\,(-\omega t)$, $A_{-2} S\,(-2\omega t)$, $A_{-3} S\,(3\omega t)$... à l'exception qu'ils tournent tous dans l'*autre* sens (c'est le signe « moins » à l'intérieur du S). Regrouper chaque $A_n S\,(n\omega t)$ avec son homologue $A_{-n} S\,(-n\omega t)$ nous donnera les fonctions sinusoïdales recherchées.

Si l'on raisonne plutôt en terme de fréquences, on obtient l'énoncé suivant (qui suffira à notre bonheur) :

toute fonction de fréquence f s'écrit comme une somme (infinie)
de fonctions sinusoïdales de fréquences nf (où n décrit les entiers naturels)
et dont les amplitudes tendent vers 0.

Par conséquent, en prenant une photo de notre corde vibrante lors d'un extremum d'amplitude, la position de la corde à une abscisse l peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &A_0 + [A_1 S\,(\omega l) + A_{-1} S\,(-\omega l)] \\ &+ [A_2 S\,(2\omega l) + A_{-2} S\,(-2\omega l)] \\ &+ [A_3 S\,(3\omega l) + A_{-3} S\,(-3\omega l)] + \cdots \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à une sinusoïde de fréquence f, soit au son fondamental *sans harmoniques*, les termes suivants à chacune des harmoniques, dont les fréquences sont bien des multiples entiers de la fréquence f fondamentale et dont les amplitudes tendent vers 0, ce qui explique que les harmoniques lointaines ne peuvent s'entendre. Tout y est.

[29] On passe de la période « spatiale » $2L$ à la fréquence « sonore » f par la relation $2L = \frac{c_{corde}}{f}$.

[30] si l'on s'accorde quelques dérogations spéciales auprès du très respectable infini

[31] ce qui n'est pas le cas sur notre exemple